ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

1982 — MATHEMATIQUES 1ERE EPREUVE (4 h)

(Voie économique)

EXERCICE 1

On considère les matrices :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$$

où a et b sont des réels ou des complexes.

1. Calculer A^2 et vérifier $A^2 = A + 2I$.

   En déduire que A est inversible et exprimer la matrice inverse A^{-1} en fonction de A et de I.

2. Montrer que A^n peut être écrite sous la forme :

$$A^n = u_n A + v_n I$$

n étant un entier positif.

Exprimer $\alpha_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1}$ et $\beta_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction respectivement de α_n et β_n ; calculer α_n et β_n en fonction de n ; en déduire u_n et v_n en fonction de n.

Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Cette expression peut-elle être utilisée quand n est nul ou quand n est un entier négatif ?

3. Montrer que M est une combinaison linéaire de A et de I. Peut-elle satisfaire à $M^2 = M + 2I$?

4. On considère l'ensemble $(\mathcal{M})$ des matrices M : montrer que $(\mathcal{M})$ est un anneau commutatif unitaire quand on le dote des lois habituelles d'addition et de multiplication matricielles.

Cet anneau possède-t-il des diviseurs de zéro ?

EXERCICE 2

Soit f la fonction qui à $x \in \mathbb{R}_+$ fait correspondre le nombre :

$$\begin{cases} f(x) = \log_x (x+1) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Préciser le domaine de définition de f et montrer que f est continue à droite de 0.

2. Etudier les variations de f et construire le graphique, (C), de ces variations. Préciser la tangente en 0 à (C).

3. Soit φ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}_+$ fait correspondre le nombre $\varphi(x) = \log_{x+1} x$.

Préciser son domaine de définition et déduire l'étude de ses variations de celle de f. Construire le graphe, (C'), de φ et déterminer les coordonnées du point commun A à (C) et à (C').

.../...

4. Résoudre l'inéquation : $\log_x (x+1) \geqslant \log_{x+1} x$.

EXERCICE 3

On réalise une suite illimitée d'épreuves indentiques et indépendantes. A chacune d'elles un événement E a la probabilité p de se produire et la probabilité q ($q = 1 - p$) ne se pas se produire (p et q sont supposés non nuls).

Soit X la variable aléatoire : nombre d'épreuves nécessaires à la réalisation de l'événement E pour la première fois.

X prend ses valeurs sur l'ensemble des entiers positifs.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. Soient deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 suivant la loi précédente.

   Quelle est la loi de probabilité de $Y = \text{Max}(X_1, X_2)$?

3. Calculer la probabilité pour que $X_1 = k$ sachant que $Y = n$.

4. Quelle est la loi de probabilité de $Z = X_1 + X_2$?

5. Calculer la probabilité pour que $X_1 = k$ sachant que $Z = n$.

EXERCICE 4

Pour une même durée de travail, les salaires d'une entreprise se répartissent comme suit :

Salaires en Francs	Nombre de personnes
3 000 à 4 000	11
4 000 à 5 000	26
5 000 à 6 000	63
6 000 à 7 000	81
7 000 à 8 000	35
8 000 à 9 000	21
9 000 à 10 000	13

1. Déterminer le salaire médian, calculer le salaire moyen.

2. Calculer la variance et l'écart type de la série. Déterminer la médiale.

3. Tracer la courbe de concentration et calculer l'indice de Gini.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail